

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 MIASSH

Espaces euclidiens

Contrôle continu, le 2 décembre 2025, 13h30–14h00

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. On pose

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Puis, on pose

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1. \quad (2 \text{ pt})$$

Calculons d'abord le coefficient devant w_1 :

$$\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} = \frac{-4 \times (-6) - 1 \times 2 + 9 \times 3}{(-6)^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{49}{49} = 1. \quad (1 \text{ pt})$$

On a donc

$$w_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on pose

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2. \quad (2 \text{ pt})$$

Calculons le coefficient devant w_1 :

$$\frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} = \frac{-5 \times (-6) + 11 \times 2 - 1 \times 3}{49} = \frac{49}{49} = 1, \quad (1 \text{ pt})$$

et celui devant w_2 :

$$\frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} = \frac{-5 \times 2 + 11 \times (-3) - 1 \times 6}{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \frac{-49}{49} = -1. \quad (1 \text{ pt})$$

On a donc

$$w_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc une base orthogonale w_1, w_2, w_3 de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit une base orthonormée en divisant chacun des vecteurs w_1, w_2, w_3 par sa norme. On a déjà calculé $\langle w_1, w_1 \rangle = 49 = 7^2$. Du coup, $\|w_1\| = \sqrt{7^2} = 7$, et on pose

$$w'_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

De même, $\langle w_2, w_2 \rangle = 49 = 7^2$ et $\|w_2\| = \sqrt{7^2} = 7$, et on pose

$$w'_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

On a $\langle w_3, w_3 \rangle = 3^2 + 6^2 + 2^2 = 49 = 7^2$. Du coup, $\|w_3\| = \sqrt{7^2} = 7$, et on pose

$$w'_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

La base orthonormée demandée est donc w'_1, w'_2, w'_3 , c-à-d,

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$